2234 1] حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E) : 195x - 232y = 1$

2] أوجد العدد الصحيح الطبيعي d الوحيد الذي يحقق :

$$195d \equiv 1 \ [232] \quad \text{و} \quad 0 \leq d \leq 232$$

3] تحقق أن 233 عدد أولي

4] لتكن المجموعة $A = \{k \in \mathbb{N} \mid 0 \leq k \leq 232\}$ ، $A^* = A \setminus \{0\}$

نعتبر التطبيق f من A نحو A المعرف بما يلي :

مهما يكن a من A ، فإن $f(a)$ هو باقي القسمة الأقليدية للعدد a^{195} على 233

أ) بين أن : $(\forall a \in A^*) \quad a^{232} \equiv 1 \ [233]$

ب) بين أنه لكل عنصرين a و b من A : إذا كان $f(a) = f(b)$ ، فإن $a = b$

ج) ليكن a و b عنصرين من A بحيث $f(a) = b$ ؛ حدد a بدلالة b

د) استنتج أن التطبيق f تقابل و حدد التقابل العكسي f^{-1}

2233 A. نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $35x - 96y = 1$: (E)

1) تحقق أن الزوج $(11;4)$ حل خاص للمعادلة (E)

2) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .

B. نعتبر في $\mathbb{N}$ المعادلة : $x^{35} \equiv 2\ [97]$: (F)

1) ليكن x حلاً للمعادلة (F).

أ) بيّن أن : $x \wedge 97 = 1$

ب) بيّن أن : $x^{96} \equiv 1\ [97]$

ج) بيّن أن $x \equiv 2^{11}\ [97]$

2) بيّن أنه إذا كان x عدداً صحيحاً طبيعياً بحيث $x \equiv 2^{11}\ [97]$ ، فإن x حلّ لـ (F)

3) حدد مجموعة حلول المعادلة (F) .

2231 نعتبر في $\mathbb{Z}$ المعادلة : $(E) : x^{24} + 7x \equiv 2 \, [13]$

1] تحقق أنه إذا كان x عدداً صحيحاً حيث $x \equiv 0 \, [13]$ ، فإن x ليس حلاً للمعادلة (E).

2] بيّن أنه إذا كان x حلاً للمعادلة (E) ، فإن : $7x \equiv 1 \, [13]$

3] حل المعادلة (E).

2185 نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E): x^2+7x+3=7y$

1) تحقق أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة : $(F): (x-2)(x+9)=7(y-3)$

2) ليكن $(x;y)$ حلاً للمعادلة (E).

بين أن : $x\equiv 2[7]$ أو $x\equiv 5[7]$

3) استنتج أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي S بحيث :

$$S=\{(7k+2;7k^2+11k+3)\mid k\in\mathbb{Z}\}\cup\{(7k-2;7k^2+3k-1)\mid k\in\mathbb{Z}\}$$

4) أ) ليكن $(x;y)$ حلاً للمعادلة (E). حدد القيم الممكنة للعدد $x\wedge y$

ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ النظمة : $(G): \begin{cases} x^2+7x+3=7y \\ x\wedge y=1 \end{cases}$

مبرهنة البواقي الصينية
Théorème des restes chinois

2167 ليكن n و m عددين من $\mathbb{N}^*$

وليكن a و b من $\mathbb{N}$.

نعتبر في $\mathbb{Z}$ النظمة:

$$(E):\begin{cases} x\equiv a\,[n] \\ x\equiv b\,[m] \end{cases}$$

ولتكن S مجموعة حلولها.

1] بيّن أن: $S\neq\emptyset \Leftrightarrow (n\wedge m)\,|\,(b-a)$

2] ليكن x_0 عدداً من S.

بيّن أن: $S=\{x_0+(n\vee m)\lambda \mid \lambda\in\mathbb{Z}\}$

3] __تطبيق__: حل في $\mathbb{Z}$ كلا من النظمتين:

$$(E_1):\begin{cases} x\equiv 5\,[25] \\ x\equiv 3\,[20] \end{cases} \quad ; \quad (E_2):\begin{cases} x\equiv 2\,[3] \\ x\equiv 1\,[2] \end{cases}$$

2183 [1] ليكن p و q من $\mathbb{N}^*$.

بيّن أن : $p \wedge q = 1 \Rightarrow \left((p+q) \wedge p = 1 \text{ و } p \wedge q(p+1) = 1 \right)$

[2] نعتبر في $(\mathbb{N}^*)^2$ المعادلة : $(E) : x(43-x) = y(x+y)$

ليكن x و y من $\mathbb{N}^*$ بحيث $(x;y)$ حل للمعادلة (E).

نضع : $\delta = x \wedge y$ و $x = a\delta$ و $y = b\delta$

أ) تحقق أن : $a(43-a\delta) = b\delta(a+b)$

ب) بيّن أن : $a | \delta$ ؛ نضع : $\delta = ac$

ج) بيّن أن: $c(a^2+ab+b^2)=43$ واستنتج أن : $c=1$

[3] حل في $(\mathbb{N}^*)^2$ المعادلة (E).